



2015 年第 11 届“IMC 国际数学竞赛” (新加坡赛区决赛)

11th IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2015

Primary 6 Contest Problem

Printed Name \_\_\_\_\_ Country \_\_\_\_\_ Score \_\_\_\_\_

- پاسخ هر مساله را در محل مربوطه بنویسید. به پاسخ های مخدوش (خط خورده یا پاک شده) امتیازی تعلق نمی گیرد!

- پاسخ تشریحی مسائل ۱۷ و ۱۸ را در محل مربوطه (زیر هر مساله) بنویسید. به پاسخ نهایی این دو مساله بدون حل تشریحی، هیچ امتیازی تعلق نمی گیرد!

Problems	1	2	3	4	5	6	7	8		
Answers										
Problems	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Answers										

Language: Persian (Farsi)

شنبه، ۱۰ مرداد ۱۳۹۴

Translated by: Amir Reza Arab

زمان: ۱ ساعت و ۳۰ دقیقه

A. سوالات چند گزینه ای (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

۱- اگر  $X = 20 \frac{1}{15} \times 15 \frac{1}{20} - 25 \frac{1}{10} \times 12 \frac{1}{50}$  ، کدام گزینه درباره ی  $X$  درست است؟

- A.  $X = 0$                       B.  $0 < X < 0.5$                       C.  $0.5 < X < 1$                       D.  $X > 1$

۲- کوچک ترین شش عدد حسابی متوالی برای پر کردن  $\square$  ها در عبارت  $\frac{\square}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} = 1$  به طوری که در هر کدام، فقط یک رقم قرار گیرد، کدام یک از گزینه های زیر است؟

- A. 0 تا 5                      B. 1 تا 6                      C. 2 تا 7                      D. 3 تا 8

۳- آنتون و بری روی پیستی دایره ای شکل به محیط ۴۵۰ متر به طور همزمان شروع به تمرین دویدن کردند. آن ها از یک نقطه و در جهات مخالف هم، شروع به تمرین کردند. اولین باری که آن ها به هم رسیدند، آنتون ۵۰ متر بیشتر از بری دویده بود. سپس بری ۲۰ درصد سرعت دویدنش را افزایش داد. آنتون بایستی چطور می دوید تا برای دومین بار در نقطه ای که تمرین شان را همزمان آغاز کرده بودند، به بری برسد؟

- A. سرعتش را ۲۵ درصد کاهش دهد.                      B. سرعتش را ۲۳/۲ درصد کاهش دهد

سرعتش را ۲۰ درصد کاهش دهد. C.

سرعتش را ۱۶/۸ درصد کاهش دهد. D.

۴- می دانیم عددی طبیعی دارای  $m$  عامل اول، در حالی که مکعب آن،  $m^2$  عامل اول دارد. کدام یک از اعداد طبیعی زیر، دارای این ویژگی نیست؟

A. 2013

B. 2014

C. 2015

D. 2016

۵- چهار بازیکن A, B, C, D در حال این پیش بینی هستند که کدام یک از آن ها برنده ی مدال طلا در مسابقه ای خواهد بود.

A می گوید: "C برنده ی مدال طلا خواهد بود."

B می گوید: "D یا من برنده ی مدال طلا خواهد بود."

C می گوید: "اگر D برنده ی مدال طلا باشد، آن گاه B نیز باید چنین باشد."

D می گوید: "رتبه ی من قطعا از رتبه ی C بالاتر است."

پس از رقابت، پیش بینی دو نفری که مدال طلا بردند درست از آب در آمد در حالی که پیش بینی دو نفری که مدال طلا نبردند، درست نبود. کدام دو بازیکن، مدال طلا بردند؟

A. A, D

B. B, D

C. C, D

D. B, C

۶- می دانیم ۹ حرف مختلف در تفریق زیر، نشان دهنده ی ۹ رقم متمایز از ۱ تا ۹ هستند.  $\overline{ABCDE}$  می تواند معرف چند عدد پنج رقمی ممکن باشد؟

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \ D \ E \\ - \ F \ G \ H \ I \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 5 \ 8 \end{array}$$

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

۷- می دانیم  $\overline{abcdefg}$  عددی هفت رقمی است که هیچ یک از رقم هایش 0 نیست و این عدد بر 7, 11, 13 بخش پذیر است. جای کدام دو رقم این عدد می توانند با هم عوض شوند تا مطمئن باشیم که عدد هفت رقمی جدید نیز بر 7, 11, 13 بخش پذیر می شود؟

A. a, d

B. a, e

C. a, f

D. a, g

۸- دنباله ی فیبوناتچی به شکل  $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, \dots$  تعریف می شود که در آن هر عدد، جمع دو عدد ما قبل خود است. اختلاف بین  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$  و  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2016}$  برابر چند است؟

A. 0

B. 1

C. 2015

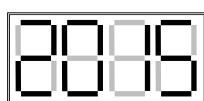
D. 2016

B. سوالات پاسخ کوتاه (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

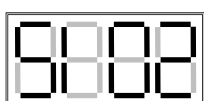
۹- نوعی LED برای نمایش اعداد مختلف چهار رقمی مورد استفاده قرار می گیرد به طوری که هر رقم آن از ۲ تا ۷ پاره خط تشکیل می شود (شکل زیر).



اگر LED چهار رقمی را دوران دهیم، عدد چهار رقمی دیگری حاصل می شود. توجه داریم که 0 نمی تواند رقم سمت چپ عددی چهار رقمی باشد. هم چنین توجه داریم که با دوران 2015 عددی چهار رقمی حاصل می شود که رقم 1 آن در وضعیت درست (مطابق شکل فوق) قرار نمی گیرد. در شکل زیر، مثال هایی از سه وضعیت درست، نادرست و بی معنا آمده اند.



درست



نادرست



بی معنا

بیشترین مقدار ممکن برای اختلاف LED چهار رقمی با دوران یافته اش که هر دو در وضعیت درست هستند، چند است؟

۱۰- پس از تکمیل جدول  $15 \times 15$  بر اساس الگوی موجود، مجموع ۱۵ عدد روی قطر چند است؟

1	2	3	...	...	...	13	14	15
17	16	15	...	...	...	5	4	3
6	7	8	...	...	...	18	19	20
24	23	22	...	...	...	12	11	10
15	16	17	...	...	...	27	28	29
35	34	33	...	...	...	23	22	21
...	...	...	...	...	...	...	...	...
119	118	117	...	...	...	107	106	105
120	121	122	...	...	...	132	133	134

۱۱- با توجه به :  $2 \times 2 - 3 = 1, 3 \times 2 - 4 = 2, 4 \times 2 - 5 = 3, \dots, 9 \times 2 - 10 = 8$  ، حاصل ساده شده ی

$$\frac{1}{2 \times 3} \times 2^2 + \frac{2}{3 \times 4} \times 2^3 + \frac{3}{4 \times 5} \times 2^4 + \dots + \frac{7}{8 \times 9} \times 2^8 + \frac{8}{9 \times 10} \times 2^9$$

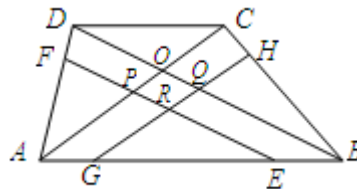
برابر چند است؟

۱۲- در استخری سه لوله وجود دارد. لوله ی A و لوله ی B برای پر کردن استخر با آب، در حالی که لوله ی C برای تخلیه ی آب به کار می رود. در آغاز، لوله ی A برای پر کردن استخر باز شد. سپس لوله ی C به طور تصادفی باز شد. ۸ ساعت طول کشید تا مسئول تعمیر و نگهداری استخر متوجه این موضوع شود و در این لحظه،  $\frac{2}{3}$  استخر پر بود. بنابراین مسئول، بلافاصله لوله ی C را بست و لوله ی B را باز کرد تا اجازه دهد آب، استخر را پر کند. پس از ۲ ساعت، استخر پر شد. هم چنین مسئول متوجه شد که در این عملیات، مقدار آب خارج شده از لوله ی C در ۱ ساعت، دو برابر مقدار آب وارد شده از طریق لوله ی B است. چند ساعت خواهد کشید تا لوله ی C، آب استخر را خالی کند؟

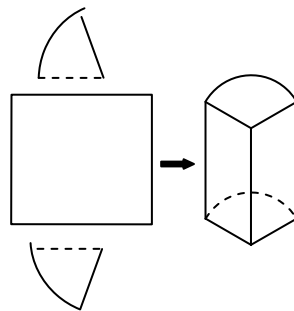
۱۳- کمیته ی برگزار کننده ی IMC برای جا به جا کردن شرکت کنندگان کشوری از دو نوع اتوبوس کوچک و بزرگ استفاده می کند که اتوبوس کوچک نمی تواند بیشتر از نصف مسافران اتوبوس بزرگ را در خود جای دهد. می دانیم یک اتوبوس کوچک و یک اتوبوس بزرگ جمعاً می توانند ۶۰ شرکت کننده را در خود جای دهند. یک اتوبوس بزرگ و دو اتوبوس کوچک می توانند دقیقاً  $\frac{1}{3}$  شرکت کنندگان را حمل کنند. اگر کمیته ۷ اتوبوس را برای جا به جایی در نظر بگیرد (یا اتوبوس های بزرگ یا ۳ مینی بوس) در نتیجه هر شرکت کننده ای می تواند یک صندلی برای نشستن داشته باشد. این کشور جمعاً چند شرکت کننده دارد؟

۱۴- مساحت دوزنقه ی ABCD، ۱ واحد مربع است و  $AB \parallel CD, EF \parallel BD, GH \parallel AC, AB = 2CD, AP = PC, BQ = QD$  و

$S_1 = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle GRE}, S_2 = S_{\triangle APF} + S_{\triangle BQH}$   
 اختلاف بین  $S_1$  و  $S_2$  را بیابید.

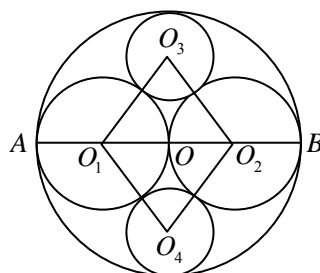


۱۵- با توجه به شکل زیر، با چسباندن دو قطاع همسان به دو انتهای یک کاغذ مستطیلی به ابعاد  $16 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$  و تا کردن آن، قسمتی از یک استوانه ایجاد می شود. شعاع قطاع، ارتفاع جسم ایجاد شده و زاویه ی مرکزی قطاع را طوری می گیریم که حجم جسم ایجاد شده بیشترین مقدار ممکن باشد. این حجم چند سانتی متر مکعب است؟



۱۶- قطر دایره ی بزرگ O برابر  $AB = 10 \text{ cm}$  است. OA, OB به ترتیب قطرهای دایره های  $O_1, O_2$  هستند و دو دایره ی

$O_3, O_4$  بر سه دایره ی دیگر مماس اند (مطابق شکل). مساحت چهارضلعی  $O_1O_2O_3O_4$  چند سانتی متر مربع است؟



C. سوالات تشریحی (هر سوال ۱۰ امتیاز ، مجموعاً ۲۰ امتیاز. راه حل تشریحی خود را در فضایی که زیر هر سوال در نظر گرفته شده است، بنویسید)

۱۷- سه ساعت A, B, C در اختیار داریم. ساعت A خیلی کند، ساعت B به طور طبیعی و ساعت C سریع تر از ساعت استاندارد B حرکت می کند. اکنون ساعت های A, C را در 0:00 مجدداً تنظیم کنید به طوری که وقتی عقربه های دقیقه شمار آن ها در یک وضعیت قرار گرفتند، ساعت B زمانی که میانگین دو ساعت دیگر است را نشان دهد. اگر از دفعاتی که در یک روز، ساعت B زمان یکسانی را برای هر دو ساعت A, C نشان می دهد، زمان 10:30 در ساعت A و زمان 12:36 در ساعت C باشد. با ذکر مقدار صحیحی که عقربه ی دقیقه شمار B نشان می دهد، این زمان عبارت است از ....

۱۸- هر یک از رقم های ۱ تا ۹ در خانه های مربعی شکل حرف ا که بر میزی واقع است، در هر مربع یک رقم، قرار داده می شود. رقم قرار گرفته در هر خانه ی خاکستری  بایستی حداقل دو تا بیشتر از رقم قرار گرفته در هر یک از خانه های سفید  همسایه اش (در یک ضلع مشترک) باشد. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

