



2013年第九屆“IMC國際數學競賽”(新加坡)  
Ninth IMC International Mathematics Contest (Singapore), 2013  
Junior High School First Year Contest Problem (G7)

Name \_\_\_\_\_ Country \_\_\_\_\_ Score \_\_\_\_\_

- پاسخ هر مساله را در محل مربوطه بنویسید. به پاسخ های مخدوش (خط خورده یا پاک شده) امتیازی تعلق نمی گیرد!  
- پاسخ تشریحی مسائل ۱۷ و ۱۸ را در محل مربوطه (زیر هر مساله) بنویسید. به پاسخ نهایی این دو مساله بدون حل تشریحی، هیچ امتیازی تعلق نمی گیرد!

Problems	1	2	3	4	5	6	7	8		
Answers										
Problems	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Answers										

Language: Persian (Farsi)  
Translated by: Amir Reza Arab

A. سوالات چند گزینه ای (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

۱. ساده شده ی کسر  $\frac{2^{n+4} - 2^{n+1}}{2^{n+4}}$  برابر کدام است؟

- A.  $2^{n+1} - \frac{1}{8}$       B.  $- 2^{n+1}$       C.  $\frac{7}{8}$       D.  $\frac{7}{4}$

۲. اگر داشته باشیم:  $b > a > 0, a^2 + b^2 = 4ab$  مقدار عددی عبارت  $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$  برابر کدام است؟

- A. 2      B. 3      C. 2 یا 3      D. قابل محاسبه نیست

۳. اگر  $ac < 0$  باشد، چند تا از این نامساوی ها :

$\frac{a}{c} < 0, ac^2 < 0, a^2c < 0, c^3a < 0, ca^3 < 0$  لزوماً برقرارند؟

- A. ۱ نامساوی      B. ۲ نامساوی      C. ۳ نامساوی      D. ۴ نامساوی

۴. اگر  $25^x = 2000$  و  $80^y = 2000$  مقدار  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  برابر چند است؟

- A. 2                      B. 1                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{3}{2}$

۵. اگر  $a, b, c$  اعداد مثبتی باشند و  $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$  ، مقدار  $x$  برابر چند است؟

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

۶. اگر  $||x| + ||x| - 1| = 1$  باشد، کدام عبارت زیر صحیح است؟

- A.  $(x + 1)(x - 1) > 0$                       B.  $(x + 1)(x - 1) < 0$   
 C.  $(x + 1)(x - 1) \geq 0$                       D.  $(x + 1)(x - 1) \leq 0$

۷. اگر  $T = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{7} + \dots + \frac{2^{48}}{99}$  و  $S = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{2^3}{5 \times 7} + \dots + \frac{2^{49}}{97 \times 99}$

باشند، مقدار  $S - T$  برابر است با:

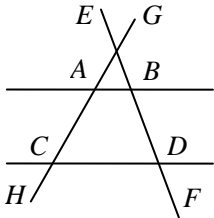
- A.  $\frac{2^{49}}{99}$                       B.  $1 - \frac{2^{49}}{99}$                       C.  $\frac{2^{49}}{99} - 1$                       D.  $\frac{2^{49}}{99} + 1$

۸. اگر  $a, c, d$  اعدادی صحیح و  $b$  عدد صحیح مثبتی باشند که  $a+b=c$  ،  $b+c=d$  ،  $c+d=a$  ، بیشترین مقدار ممکن برای  $a+b+c+d$  چند است؟

- A. -5                      B. -1                      C. 0                      D. 1

B. سوالات پاسخ کوتاه (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

۹. در شکل زیر، دو پاره خط موازی  $\overline{AB}$  ،  $\overline{CD}$  و پاره خط  $\overline{EF}$  ،  $\overline{GH}$  را قطع کرده اند. چند جفت زاویه ی داخلی که در یک طرف مورب قرار دارند، در شکل دیده می شوند؟



۱۰. عمل  $\Delta$  را در مجموعه ی اعداد حقیقی به این صورت تعریف کرده ایم: برای هر  $x$  و  $y$  حقیقی،  
 $x \Delta y = ax + by + c$  که در آن  $a, b, c$  اعدادی ثابت اند (در سمت راست تساوی، جمع و ضرب معمولی آمده اند). اگر  $3 \Delta 5 = 15$  و  $4 \Delta 7 = 28$ ، مقدار  $1 \Delta 1$  برابر چند است؟

۱۱. برای چهار عدد صحیح مثبت متمایز  $q, p, n, m$  داریم:

$$(7 - m)(7 - n)(7 - p)(7 - q) = 4$$

مجموع اعداد  $q, p, n, m$  را به دست آورید.

۱۲. مجموعه ی جواب نامعادله ی  $(a + b)x + (2a - 3b) < 0$  عبارت است از:

$$x > \frac{-1}{3}$$

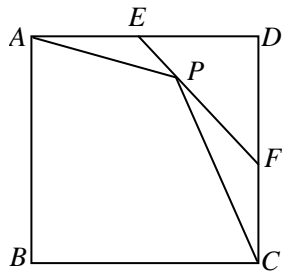
مجموعه ی جواب نامعادله ی  $(a - 3b)x + (b - 2a) > 0$  را به دست آورید.

۱۳. یک زاویه، صفحه را به دو قسمت تقسیم می کند. سه زاویه، صفحه را به حداکثر چند قسمت تقسیم می کنند؟

۱۴. اگر  $|a| = 1$ ،  $|b| = 2$ ،  $|c| = 3$  و  $a > b > c$  مقدار عبارت  $(a + b - c)^2$  را به دست آورید.

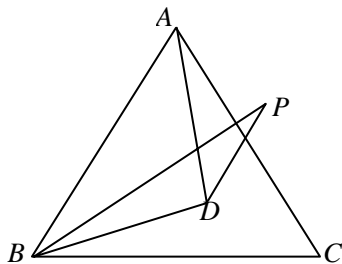
۱۵. ماشین L شهر A را به مقصد شهر B و همزمان با آن، ماشین L شهر B را به مقصد شهر A ترک می کند. هر دو ماشین با سرعت های ثابت حرکت می کنند. دو ماشین پس از ۶ ساعت در پمپ بنزینی که در نقطه ی وسط دو شهر و به فاصله ی ۳ کیلومتر از مرکز شهر A و ۳ کیلومتر از مرکز شهر B قرار دارد، به هم می رسند. اگر ماشین L تندتر از ماشین L حرکت کند، سرعت ماشین L را پیدا کنید.

۱۶. در مربع ABCD، F, E به ترتیب وسط های پاره های  $\overline{AD}$ ،  $\overline{DC}$  هستند. اگر نقطه ای روی  $\overline{EF}$  و مساحت ABCD برابر ۲۰ متر مربع باشد، مساحت چهارضلعی ABCP چند سانتی متر مربع است؟



C. سوالات تشریحی (هر سوال ۱۰ امتیاز، مجموعاً ۲۰ امتیاز. راه حل تشریحی خود را در فضایی که زیر هر سوال در نظر گرفته شده است، بنویسید)

۱۷. با توجه به شکل، D نقطه ای درون مثلث متساوی الاضلاع  $\triangle ABC$  است که  $DB=DA$  و P نقطه ای بیرون  $\triangle ABC$  است که  $BP=BA$  و  $\angle DBP = \angle DBC$ . اندازه  $\angle BPD$  را به دست آورید.



۱۸. اگر  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$  اعدادی طبیعی باشند که

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_7$$

و داشته باشیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 159$$

بیشترین مقدار ممکن برای  $x_1 + x_2 + x_3$  را به دست آورید.