



2014 年第 10 届“IMC 国际数学竞赛” (决赛)

10th IMC International Mathematics Contest, 2014

Junior High School First Year Contest Problem

Printed Name _____ Country _____ Score _____

- پاسخ هر مساله را در محل مربوطه بنویسید. به پاسخ های مخدوش (خط خورده یا پاک شده) امتیازی تعلق نمی گیرد!

- پاسخ تشریحی مسائل ۱۷ و ۱۸ را در محل مربوطه (زیر هر مساله) بنویسید. به پاسخ نهایی این دو مساله بدون حل تشریحی، هیچ امتیازی تعلق نمی گیرد!

Problems	1	2	3	4	5	6	7	8		
Answers										
Problems	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Answers										

Language: Persian (Farsi)

Translated by: Amir Reza Arab

A. سوالات چند گزینه ای (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

۱- a و b دو عدد گویا هستند که در رابطه ی $|a + b| + |a - b| = 2a (a \neq b)$ صدق می کنند. کدام یک از گزینه های زیر، همواره نادرست است؟

- A. $|a| > b$ B. $a < |b|$ C. $a + b > 0$ D. $a - b > 0$

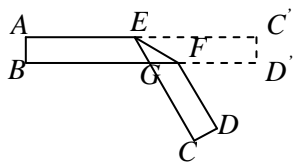
۲- شش نقطه (از چپ به راست) A, B, C, D, E, F بر محور x طوری قرار دارند که

$$AB = 2BC = 4CD = 8DE = 16EF$$

فرض کنید که مختصات نقاط A و F بر محور x ، به ترتیب عبارت اند از -20 و 14 . کدام یک از اعداد صحیح زیر به C از همه نزدیک تر است؟

- A. -16 B. -5 C. 2 D. 6

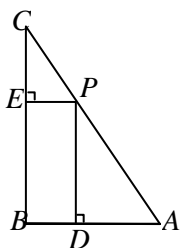
۳- دو لبه ی موازی کاغذی را مطابق شکل، طوری تا کرده ایم که EF خط تا است. اگر $\angle EFB=30^\circ$ باشد، آن گاه
 ① $\angle C'EF=30^\circ$, ② $\angle AEC=150^\circ$, ③ $\angle BGE=60^\circ$, ④ $\angle BFD=120^\circ$.



کدام یک از نتایج فوق درست هستند؟

- A. ① و ③ B. ①, ② و ③ C. ①, ③ و ④ D. ①, ② و ④

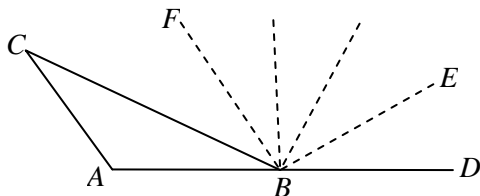
۴- در مثلث ABC داریم: $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$. نقطه ی P بر AC و نقاط D و E به ترتیب بر AB و BC طوری هستند که



نسبت $\frac{AP}{PC}$ برابر است. $PD = 2PE$ و $PD \perp AB, PE \perp BC$

- A. ۳ B. ۲ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

۵- مطابق شکل، $\angle CBD$ به پنج قسمت مساوی تقسیم شده است. فرض کنید $BE \perp BF$ و $BF \parallel AC$ ، آن گاه اندازه ی $\angle A$ برابر درجه است.



- A. ۱۰۰ B. ۱۲۰ C. ۱۴۰ D. ۱۵۰

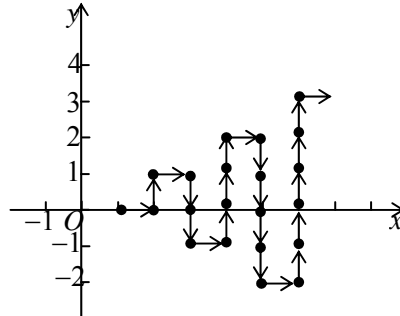
۶- $N (35 \leq N \leq 53)$ عدد صحیح فردی است که نمی تواند به شکل $a \times b + c$ نمایش داده شود که در آن a, b, c سه عدد مرکب متمایزند. چند تا از این N ها وجود دارد؟

- A. ۱ B. ۲ C. ۳ D. بیش تر از ۳

۷- تعداد مثلث های متساوی الساقین (غیر متساوی الاضلاع) که طول سه ضلع آن، اعدادی طبیعی از ۱ تا ۶ هستند، را بیابید.

- A. ۲۱ B. ۲۳ C. ۲۵ D. ۲۷

۸- در دستگاه مختصات زیر، نقاطی نشان داده شده اند که طول و عرض شان هر دو اعدادی صحیح اند. اولین نقطه به مختصات $(1, 0)$ ، دومین نقطه به مختصات $(2, 0)$ و ... نقاط متوالی را با استفاده از \rightarrow به هم وصل کرده ایم و مختصات نقاط حاصل به این ترتیب اند: $(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 0), (3, -1), \dots$. طبق این الگو $(14, 2)$ مختصات چندمین نقطه است؟

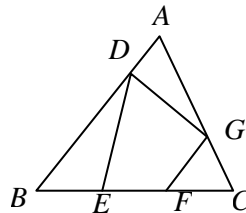


- A. ۱۰۰ B. ۹۹ C. ۱۰۱ D. ۱۰۲

B. سوالات پاسخ کوتاه (هر سوال ۵ امتیاز ، مجموعاً ۴۰ امتیاز)

۹- در شکل زیر، ABC مثلثی با مساحت ۱ است. نقطه D بر AB و نقطه G بر AC قرار دارد به طوری که $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CG}$.

نقاط E و F ، پاره خط BC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده اند. فرض کنید $S_{DEFG} = 3S_{\Delta ADG}$ ، آن گاه مساحت ΔADG برابر است با



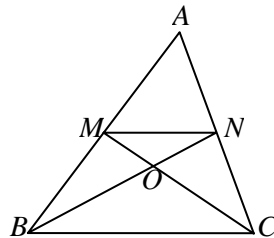
۱۰- m را عدد صحیح مثبتی بگیرید به طوری که دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+2y=10, \\ 3x-2y=0, \end{cases}$ دارای جواب (x, y) است که x و y

هر دو اعدادی صحیح اند. مقدار عددی m^2+1 برابر چند است؟

۱۱- (x, y) جواب دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x+3y=3m+66 \\ x-y=4m+13 \end{cases}$ است به طوری که $x \geq 0, y \geq 0$. بیش ترین مقدار ممکن برای $|3m+14| + |2m-20|$ برابر است با

۱۲- عبارت $1 \times (3^2 - 2) + 2 \times (4^2 - 3) + \dots + 8 \times (10^2 - 9) + 9 \times (11^2 - 10)$ برابر است با

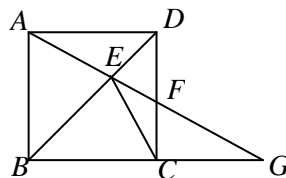
۱۳- در شکل زیر $S_{\Delta ABC} = 1$ و M و N به ترتیب، وسط اضلاع AB و AC هستند. مجموع مساحت های تمامی مثلث های موجود در شکل برابر است با



۱۴- مجموع تمامی اعداد صحیح a را بیابید به طوری که معادله $2|x| = ax + 1$ یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی داشته باشد.

۱۵- ۶ عدد صحیح مثبت متمایز m, n, p, q, r, s در رابطه $(9-m)(9-n)(9-p)(9-q)(9-r)(9-s) = -36$ صدق می کنند. حاصل جمع $m+n+p+q+r+s$ برابر چند است؟

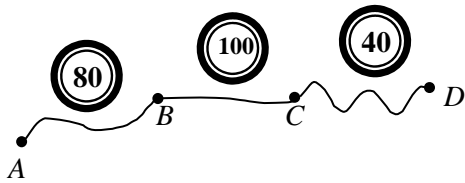
۱۶- در مربع $ABCD$ ، E بر قطر BD قرار دارد. امتداد AE ، ضلع CD و امتداد BC را به ترتیب در F و G قطع می کند. اگر $CE=CG$ ، نسبت های $\frac{CG}{AB}$ و $\frac{CF}{GE}$ برابر چند هستند؟



C. سوالات تشریحی (هر سوال ۱۰ امتیاز ، مجموعاً ۲۰ امتیاز. راه حل تشریحی خود را در فضایی که زیر هر سوال در نظر گرفته شده است، بنویسید)

۱۷- بزرگ راهی ۴۸ کیلومتری مطابق شکل به سه قسمت مساوی AB ، BC ، CD تقسیم شده است. حد مجاز سرعت، بر حسب کیلومتر بر ساعت، برای هر قسمت در دایره ها نشان داده شده است. دو ماشین در حال حرکت در جهات مقابل هم هستند که یکی ماشین سریع و دیگری ماشین کند است. حداکثر سرعت ماشین سریع دو برابر حداکثر سرعت ماشین کند است. ماشین سریع از نقطه A حرکت می کند، در حالی که ماشین کند از نقطه D در حال حرکت است. ماشین ها با سرعت هر چه تمام تر حرکت می کنند و برای اولین بار در نقطه ای بین C و D به هم می رسند. ماشین ها پس از رسیدن به نقاط انتهایی دور می زنند و ماشین سریع $11/5$ کیلومتر پس از عبور از C برای بار دوم به ماشین کند می رسد. فاصله ی

نقطه ی C تا نقطه ای که دو ماشین برای اولین بار در آن جا به هم رسیدند، چقدر است؟ (سرعت در هر قسمت نمی تواند بیش تر از سرعت نشان داده شده در دایره ی مربوطه باشد).



۱۸- دنباله ی سه عددی ۸, ۹, ۳ داده شده است. با استفاده از قاعده ی زیر دنباله های بیش تری پدید می آیند:

برای هر دو عدد کنار هم در دنباله ی اصلی، همواره عدد سمت راست را بر عدد سمت چپ تقسیم می کنیم و حاصل را بین

آن ها می نویسیم. دنباله ی جدیدی که پس از اولین بار استفاده از قاعده به دست می آید، عبارت است از: $۸, \frac{۸}{۹}, ۹, ۳, ۳$.

با دو بار استفاده از قاعده به این دنباله می رسیم: $۸, ۹, \frac{۸}{۹}, \frac{۸}{۸۱}, ۹, ۳, ۳, ۱, ۳$. حاصل ضرب اعداد دنباله ای که با

۱۰۰ بار استفاده از این قاعده به آن می رسیم، برابر چند است؟